Kommentarmaterial till kunskapskraven i matematik del 2

Skolverket

Skolverket
Stockholm 2013
www.skolverket.se

ISBN: 978-91-7559-037-0

Innehåll

1. Inledning 4

Vad materialet är och inte är 4

Materialets disposition 5

2. Kunskapskrav uppbyggda med värdeord 6

Värdeorden 6

Sammanhanget bestämmer hur orden ska tolkas 7

3. Bedömning i årskurs 6 8

Att föra och följa matematiska resonemang 8

Bedömningsaspekter 10

Elevarbeten med kommentarer 12

4. Bedömning i årskurs 9 22

Att föra och följa resonemang 22

Bedömningsaspekter 24

Elevarbeten med kommentarer 26

5. Avslutningsord 37

1. Inledning

Från och med höstterminen 2011 sätter lärare betyg med hjälp av de nya kunskapskraven i läroplanen.

Syftet med det här materialet är att ge lärare stöd i hur de kan resonera när de bedömer elevers kunskaper utifrån kunskapskraven. I materialet presenteras en mängd bedömningar som verksamma lärare har gjort av autentiska elevexempel. Bedömningen utgår från de så kallade värdeorden, det vill säga de fetmarkerade ord i kunskapskraven som anger nivåerna.

Det är nödvändigt att lärare identifierar vilka bedömningsaspekter som de utgår från för att kunna göra säkrare bedömningar, men också för att kunna diskutera elevprestationer på ett bra sätt. Det är också centralt för att lärare ska kunna beskriva för elever och vårdnadshavare på vilket sätt en elev kan förbättra sina prestationer.

Detta är andra delen av kommentarmaterial till kunskapskraven i matematik. Till denna andra del finns även ett filmat kommentarmaterial som omfattar en film med elever i en muntlig bedömningssituation samt en film där lärare diskuterar värdeorden med utgångspunkt i bedömningsaspekterna av förmågan att föra och följa resonemang.

Det är Skolverkets förhoppning att skriften ska kunna utgöra ett stöd för vidare diskussioner mellan kollegor.

VAD MATERIALET ÄR OCH INTE ÄR

Inledningsvis ska något sägas om materialets avgränsningar och varför de är gjorda.

Materialet ska:

- vara ett stöd i att tolka kunskapskraven
- underlätta för lärare att diskutera bedömningsfrågor
- underlätta kommunikationen med elever och vårdnadshavare om elevernas arbete

Materialet ska däremot inte:

- ge en helhetsbild av kunskapskraven
- sätta kravnivåer och definiera betygsgränser på det sätt som till exempel ett nationellt prov gör

Kommentarmaterial till kunskapskraven finns i ett urval av ämnen, och varje material behandlar delar av kunskapskraven. Dessa avgränsningar har gjorts av flera skäl. Det är inte meningsfullt att gå igenom samtliga värdeord i alla ämnen, eftersom det finns så pass stora likheter mellan hur nivåerna är uppbyggda. Likheterna gör att man ofta kan överföra resonemangen om värdeorden mellan olika ämnen, även om det också finns kännetecken på kvalitet som till stor del beror på ämnet.

Skolverket vill inte heller ge intryck av att säkra och rättvisa bedömningar är beroende av att man först har brutit ned kunskapskraven på samma detaljerade sätt som i det här materialet. När man som lärare gör bedömningar av elevers arbete gör man det ofta både utifrån en medveten analys av vilka bedömningsaspekter som kan vara relevanta, och samtidigt utifrån erfarenhetsbaserad kunskap om samma aspekter.

Med hjälp av det här materialet får lärare en möjlighet att utveckla en mer detaljerad och systematiserad förståelse av några av värdeorden i kunskapskraven. Därigenom är det Skolverkets förhoppning att det ska vara enklare att skaffa sig en överblick över kraven som helhet.

MATERIALETS DISPOSITION

Kommentarmaterialet består av fem kapitel som är upplagda på följande sätt.

- *Kapitel 1* beskriver syftet med materialet och några avgränsningar som har gjorts.
- *Kapitel 2* handlar om hur man kan förstå kunskapskraven. I kapitlet redogörs för vad som menas med värdeord i kunskapskraven och hur man som lärare kan tolka och förstå vad värdeorden innebär.
- *Kapitel 3* beskriver hur lärare har bedömt autentiska elevarbeten i årskurs 6 med hjälp av kunskapskraven.
- *Kapitel 4* beskriver hur lärare har bedömt autentiska elevarbeten i årskurs 9 med hjälp av kunskapskraven.
- *Kapitel 5* avslutar materialet och ger tips på annat bedömningsstöd från Skolverket.

2. Kunskapskrav uppbyggda med värdeord

För att bättre förstå den kommande diskussionen om bedömning med hjälp av värdeord behöver man först en snabb överblick hur kunskapskraven är uppbyggda.

Bilden här nedanför illustrerar att kunskapskraven bygger på kursplanens olika delar.

I kursplanen för matematik finns fem förmågor som eleven ska ges förutsättningar att utveckla genom undervisningen. Förmågorna är skrivna i punktform längst ned i syftestexten:

- *formulera och lösa problem med hjälp av matematik samt värdera valda strategier och metoder,*
- *använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp,*
- *välja och använda lämpliga matematiska metoder för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter,*
- *föra och följa matematiska resonemang, och*
- *använda matematikens uttrycksformer för att samtala om, argumentera och redogöra för frågeställningar, beräkningar och slutsatser.*

Dessa förmågor är desamma för alla årskurser och bygger tillsammans med det centrala innehållet upp kunskapskraven.

VÄRDEORDEN

I kunskapskraven används ett antal värdeord för att beskriva kunskapsnivåer för olika betygssteg. Exempel på sådana värdeord är **i huvudsak fungerande** (E), **ändamålsenliga** (C) och **ändamålsenliga och effektiva** (A). I läroplanen är alla värdeord i kunskapskraven fetmarkerade för att skillnaderna mellan kunskapskraven ska bli tydliga.

Den här diskussionen om värdeord bygger vidare på Skolverkets kommentarmaterial till grundskolans kursplaner. Där förs en generell diskussion om hur man kan tolka några vanligt förekommande värdeord i kunskapskraven. Den diskussionen fördjupas och blir ämnesspecifik i det här materialet.

SAMMANHANGET BESTÄMMER HUR ORDEN SKA TOLKAS

I det här materialet diskuteras hur man kan tolka och förstå kunskapskraven. Vad innebär det till exempel att framföra och bemöta matematiska argument på ett sätt som **till viss del för resonemangen framåt** respektive att framföra och bemöta matematiska argument på ett sätt som **för resonemangen framåt** och hur kan man urskilja och bedöma detta i en bedömningssituation?

Hur man tolkar ett värdeord måste nästan alltid avgöras av sammanhanget. Det här materialet lyfter fram hur några av orden kan tolkas och användas i en konkret situation, till exempel hur en lärare använder uttrycket till **viss del** vid bedömning av ett skriftligt arbete i geometri. Vid bedömningen inom ett annat kunskapsområde skulle läraren behöva tolka samma ord på ett annat sätt. Detta innebär att det ofta är svårt att slå fast en tolkning av ett enskilt värdeord en gång för alla. Vissa aspekter av värdeorden kan vara unika för ett visst ämne eller centralt innehåll, men det kan även finnas andra aspekter som är mer eller mindre desamma oavsett sammanhanget.

Vanligtvis visar eleven kunnande utifrån flera matematiska förmågor vid arbetet med en uppgift. Det kan handla om val av strategi och metod när uppgiften ska lösas, att argumentera för eller emot ett tillvägagångssätt samt att använda och beskriva matematiska begrepp. Förmågorna i matematik är överlappande och går in i varandra. Därför kan också flera delar av kunskapskravet vara aktuella vid bedömning. För att fånga komplexiteten i helheten behöver delarna göras synliga.

I detta material försöker vi beskriva och därmed särskilja det unika för förmågorna, som de är beskrivna i kunskapskraven. Materialet fokuserar därför enbart på delar av kunskapskraven och på de värdeord som finns i dessa.

3. Bedömning i årskurs 6

Det här kapitlet lyfter fram hur verksamma lärare har bedömt elevarbeten i ämnet matematik utifrån kunskapskraven för årskurs 6. I de olika avsnitten finns elevarbeten och kommentarer som relaterar till olika delar av kunskapskraven. I avsnittet behandlas delar av kunskapskraven som utgår från *förmågan att föra och följa matematiska resonemang*.

Till detta material finns också två filmer som handlar om hur verksamma lärare bedömer elevers resonemang i en muntlig bedömningssituation. En film visar elever i årskurs 9 som genomför en muntlig uppgift tillsammans med en lärare. I den andra filmen diskuterar tre lärare kunskapskravens värdeord för resonemangsförmågan. Lärarna utgår från exempel i elevernas gruppsamtal. Båda filmerna kan användas som underlag för diskussioner om hur förmågan att föra och följa resonemang kan bedömas muntligt, även av lärare i årskurs 6.

ATT FÖRA OCH FÖLJA MATEMATISKA RESONEMANG

Inledningsvis presenteras den förmåga och de delar av kunskapskraven som bedömningarna har utgått ifrån samt ett resonemang om relationen mellan förmågan och det centrala innehållet. Därefter görs en analys av olika bedömningsaspekter av den aktuella förmågan och värdeorden. Vilka aspekter kan finnas i *förmågan att föra och följa matematiska resonemang?* Vad innebär det att föra **enkla** resonemang jämfört med att föra **utvecklade** resonemang?

Slutligen presenteras uppgifter med tillhörande elevarbeten. I anslutning till varje elevarbete förs ett resonemang om hur lärare har bedömt dessa utifrån de aktuella delarna av kunskapskraven.

De delar av kunskapskraven som kommenteras utgår från *förmågan att föra och följa matematiska resonemang*. Värdeorden som beskriver kvaliteter i resonemangsförmågan finns på tre olika ställen i kunskapskraven för årskurs 6:

*Kunskapskrav för **betyget E** i slutet av årskurs 6*	*Kunskapskrav för **betyget C** i slutet av årskurs 6*	*Kunskapskrav för **betyget A** i slutet av årskurs 6*
Eleven (…) för **enkla och till viss del** underbyggda resonemang om resultatens rimlighet i förhållande till problemsituationen (…). … I beskrivningen kan eleven (…) föra **enkla** resonemang kring hur begreppen relaterar till varandra. …	Eleven (…) för **utvecklade och relativt väl** underbyggda resonemang om resultatens rimlighet i förhållande till problemsituationen(…). … I beskrivningen kan eleven (…) föra **utvecklade** resonemang kring hur begreppen relaterar till varandra. …	Eleven (…) för **välutvecklade och väl** underbyggda resonemang om resultatens rimlighet i förhållande till problemsituationen (…). … I beskrivningen kan eleven (…) föra **välutvecklade** resonemang kring hur begreppen relaterar till varandra. … ▶▶

I redovisningar och samtal kan eleven föra och följa matematiska resonemang genom att ställa frågor och framföra och bemöta matematiska argument på ett sätt som **till viss del för resonemangen framåt.**	I redovisningar och samtal kan eleven föra och följa matematiska resonemang genom att ställa frågor och framföra och bemöta matematiska argument på ett sätt som **för resonemangen framåt.**	I redovisningar och samtal kan eleven föra och följa matematiska resonemang genom att ställa frågor och framföra och bemöta matematiska argument på ett sätt som **för resonemangen framåt och fördjupar eller breddar dem.**

Att *följa och föra matematiska resonemang* innebär både en tolkande och en skapande del. Den tolkande delen innebär att göra en relevant tolkning av det som framförts muntligt eller skriftligt. Det innebär att följa och bedöma både andras och/eller sina egna argument. Den skapande delen handlar om att driva en process framåt med nya matematiska argument. I Kommentarmaterialet till kursplanen i matematik beskrivs att *progressionen ligger i allt högre krav på elevens sätt att framföra och bemöta matematiska argument i redovisningar, samtal och diskussioner*. I kunskapskraven uttrycks progressionen från årskurs 1 till årskurs 9. Från informella argument i årskurs 1–3 till relevanta, hållbara och tillräckliga argument i årskurs 7–9. Från att ställa frågor i årskurs 1–3 till att bemöta argument i årskurs 7–9. Från att föra resonemang om val av metoder och räknesätt i årskurs 1–3 till att föra resonemang om val av tillvägagångssätt i åk 7–9.

Problemlösning är en central aktivitet i matematik, som exempelvis ger eleverna tillfälle att föra matematiska resonemang om resultatens rimlighet. Vid lösning av problem görs strategival som underbyggs av matematiska argument och resonemangen kan leda fram till lösningen. Resonemangen kan vara enkla och till viss del underbyggda, såväl som välutvecklade och väl underbyggda. Beroende på uppgifternas karaktär kommer resonemang om resultatens rimlighet att föras på olika sätt.

Matematiska begrepp ingår i det centrala innehållets alla kunskapsområden och möjlighet finns att föra matematiska resonemang om begrepp och om hur olika begrepp relaterar till varandra. I Kommentarmaterialet till kursplanen i matematik beskrivs förmågan att följa matematiska resonemang bland annat som *att utveckla en förståelse för att matematiska samband är konstruerade, och att de därför också kan återupptäckas genom att man resonerar sig fram.* Vid undersökande uppgifter kan elever upptäcka matematiska samband, till exempel relationen mellan en cirkels omkrets och diameter. Genom undersökningens resultat kan resonemangen föras framåt mot en generell slutsats. Ett exempel kan vara att eleven har undersökt två cirklar och funnit att kvoten mellan omkrets och diameter är densamma, vilket kan bemötas med argument om att kvoten är densamma för alla cirklar.

Uppgifters formulering och karaktär ger möjlighet att visa olika delar av förmågan att resonera. Vilka resonemang som förs är beroende av det centrala innehållet. När elever arbetar med uppgifter i matematik berörs ofta flera olika delar av det centrala innehållet. I det här materialet presenteras elevarbeten inom områdena bråk och geometri för att belysa värdeorden i kunskapskraven. Värdeorden illustreras med olika elevarbeten för att visa att de kan konkretiseras på olika sätt.

Bedömningsaspekter

I arbetet med olika uppgifter kan eleven på flera olika sätt visa sin förmåga att föra och följa matematiska resonemang. Det kan vara i samband med problemlösning där resonemang kan föras om resultatens rimlighet. Resonemangen kan vara mer eller mindre underbyggda av bilder, tabeller, grafer, beräkningar eller andra matematiska uttrycksformer. När eleven använder och beskriver olika matematiska begrepp kan eleven också föra resonemang om begreppen och om hur begreppen relaterar till varandra. I arbetet med att lösa uppgifter eller i diskussioner med kamrater och läraren kan eleven ställa frågor, framföra och bemöta argument på ett sätt som för resonemangen framåt.

När det gäller *förmågan att föra och följa matematiska resonemang* kan bedömningen av elevarbeten utgå ifrån:

Hur resonemang förs genom att ställningstaganden följs och motiveras

En aspekt av elevens förmåga att föra och följa resonemang handlar om i vilken grad eleven kan föra fram argument och resonera kring ett ställningstagande, kring en lösning eller om resultats rimlighet. Detta omfattar att skilja på vad som är ett påstående och vad som är ett välgrundat matematiskt argument och bedömningen anger i vilken grad argumenten är välgrundade, hållbara och tillräckliga. Matematiska argument kan framföras och underbyggas med hjälp av olika uttrycksformer. Ett välgrundat argument kan, till exempel, utgå från en geometrisk figurs egenskap, medan ett påstående kan vara något som en klasskamrat har sagt. En högre kvalitet innebär att de matematiska argumenten är välgrundade, hållbara och tillräckliga. En lägre kvalitet innebär att argumenten är påståenden som inte är matematiskt grundade och inte heller tillräckliga.

Hur lösningen legitimeras genom resonemang

En annan aspekt handlar om att eleven förklarar *varför* man kan göra det man gör under givna förutsättningar. Ett matematiskt resonemang består av en följd av påståenden där varje påstående följer logiskt ur de föregående. Argumenten i ett resonemang eller en lösning måste också bilda en logisk följd. Matematiken bygger på logiska följder där det finns ett gällande samband mellan påståenden, till exempel att om en triangel är likbent så har triangeln två lika stora vinklar. En högre kvalitet innebär att den logiska följden följs och att argumenten följer på varandra. En lägre kvalitet innebär att det finns luckor i det matematiska resonemang som leder fram till lösningen.

Hur resonemang förs kring begrepp och hur de relaterar till varandra

Logiska följder anger också samband eller relationer mellan begrepp. Elevens matematiska resonemang kring hur begrepp relaterar till varandra är nära knutet till förmågan att använda och beskriva dessa begrepp. En lägre kvalitet innebär att föra ett enkelt resonemang om ett begrepp, till exempel att arean av ett tangram är lika stor oavsett hur bitarna är placerade. En högre kvalitet kan till exempel innebära att föra ett resonemang om hur en rektangels form är kopplad till areans storlek när omkretsen är given. En högre kvalitet innebär också att tolka och föra matematiska resonemang om samband mellan flera begrepp och relationer samt att hänvisa till satser.

Hur resonemang förs genom att argument troliggörs med empiriska underlag

I undersökande uppgifter kan det finnas möjlighet att se mönster, strukturer eller regelbundenheter. Det gäller då att avgöra om dessa är tillfälligheter eller om det finns en förklaring. En aspekt av förmågan att föra och följa resonemang handlar om i vilken grad empiriska fakta används som underlag för slutsatsen eller resultatets rimlighet. En lägre kvalitet innebär att få empiriska fakta redovisas. Exempel på sådana empiriska fakta är figurer, beräkningar eller systematiska tabeller som underbygger det matematiska resonemanget och slutsatsen. En högre kvalitet innebär att det matematiska resonemanget är väl underbyggt med hjälp av väl valda uttrycksformer anpassade till situation och sammanhang. En högre kvalitet kan också vara ett generellt resonemang, om uppgiften medger det.

Hur resonemang förs genom att argument följs och bemöts

Ytterligare en aspekt av förmågan att föra och följa matematiska argument omfattar hur resonemangen följs och bemöts. Denna aspekt omfattar dels att göra en relevant tolkning av det som framförts och att följa och bedöma sina egna eller någon annans argument, dels handlar det om att driva processen framåt genom att ta steg och tänka nytt.

Att bemöta ett matematiskt argument kan ske både muntligt och skriftligt. En lägre kvalitet innebär att bemöta argument genom att ställa en enkel fråga eller utifrån tolkningen driva processen ytterligare ett steg framåt. En högre kvalitet innebär att i bemötandet visa på en ny infallsvinkel, framföra matematiska argument av annat slag som driver processen framåt eller ge exempel som kullkastar argumentet. Det kan också innebära att driva hela processen av matematiska resonemang fram till en lösning.

Ett sätt att bemöta argument är att visa på motexempel. Det kan vara att visa på, att under givna förutsättningar, en slutsats eller ett ställningstagande inte stämmer eller att resultatet inte är rimligt. I uppgiften bråk för årskurs 6 visar elevarbeten motexempel genom att visa att summan av bråken är $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ är lika med en hel och att svaret inte kan vara $\frac{2}{4}$ eftersom $\frac{2}{4}$ är lika med $\frac{1}{2}$.

ELEVARBETEN MED KOMMENTARER

För att illustrera de värdeord som anger kvaliteter för hur resonemang förs och följs presenteras tre uppgifter och åtta kommenterade elevarbeten. Uppgifternas karaktär medför att olika typer av resonemang prövas. Elevarbetena sorteras under de värdeord de i huvudsak illustrerar.

I arbetet med uppgifterna kan eleven på flera olika sätt visa kunnande i att föra och följa matematiska resonemang. Det kan omfatta aspekterna:

- hur resonemang förs genom att ställningstaganden följs och motiveras
- hur lösningen legitimeras genom resonemang
- hur resonemang förs kring begrepp och hur de relaterar till varandra
- hur resonemang förs genom att argument troliggörs med empiriska underlag
- hur resonemang förs genom att argument följs och bemöts.

Utgångspunkten för elevarbetena är följande uppgifter:

Uppgift Bråk

En av dina kamrater har gjort följande beräkning: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$
Det är fel. Förklara för din kamrat varför det är fel.

I uppgiften finns möjlighet att förklara ett ställningstagande. Ställningstagandet är redan givet, vilket gör att uppgiften har en enkel ingång. I uppgiften ges möjlighet att använda olika uttrycksformer, till exempel bilder, ord och matematiska symboler, i resonemangen om varför beräkningen är fel. Det går också att visa motexempel. Uppgiftens formulering ger begränsade möjligheter att visa högre kvaliteter.

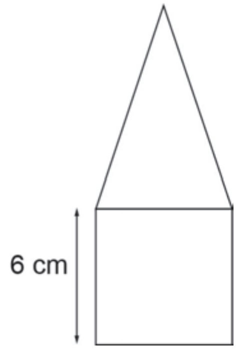
De aspekter som kan belysas med uppgiften är
- hur resonemang förs genom att ställningstaganden följs och motiveras
- hur resonemang förs genom att argument följs och bemöts.

De delar ur kunskapskraven som kan belysas med uppgiften är med vilken kvalitet eleven
- för underbyggda resonemang om resultatens rimlighet
- framför och bemöter matematiska argument på ett sätt som för resonemangen framåt.

Uppgift Femhörningen

Figuren består av en kvadrat och en likbent triangel. Kvadraten och triangeln har samma omkrets. Tillsammans bildar de en femhörning.

Vilken omkrets har femhörningen? Motivera hur du kom fram till ditt svar.



Uppgiften är av problemlösande karaktär då lösningsmetoden inte är given. I uppgiften finns utmaningar som att tolka begreppet omkrets samt föra ett resonemang om lösningens legitimitet, det vill säga att argumentera om varför det är möjligt att lösa uppgiften på det sättet. Det finns möjlighet att visa ett flertal delberäkningar som utgör underlag för resonemangen. En annan möjlighet är att genomgående argumentera om varför beräkningar är möjliga att göra.

De aspekter som kan belysas med uppgiften är

- hur resonemang förs genom att ställningstaganden följs och motiveras
- hur lösningen legitimeras genom resonemang
- hur resonemang förs genom att argument följs och bemöts.

De delar ur kunskapskraven som kan belysas med uppgiften är med vilken kvalitet eleven

- för resonemang kring hur begreppen relaterar till varandra
- framför och bemöter matematiska argument på ett sätt som för resonemangen framåt.

Uppgift Ståltråden

Tänk dig att du har en ståltråd som är 24 cm lång. Tråden kan formas till olika rektanglar. Hela tråden ska utnyttjas och bilda figurens omkrets.

- Rita den rektangel som har *största* möjliga area. Förklara varför den har störst area.
- Rita en rektangel med så liten area som möjligt. Förklara varför den har minsta möjliga area.
- Vilka slutsatser kan du dra av din undersökning?

Uppgiften är av undersökande problemlösningskaraktär. I uppgiften ges möjlighet att undersöka relationen mellan en rektangels form och areans storlek. Det handlar om att hitta rektangeln med största möjliga area. Resonemang om resultatens rimlighet kan föras, det vill säga resonemang om varför kvadraten är störst och att minsta möjliga area saknas. Resonemangen kan underbyggas av ritade figurer, beräkningar eller systematiska tabeller. Resultatet av undersökningen behöver även tolkas. Argumenten som förs fram kan leda till en slutsats om relationen mellan en rektangels form och areans storlek. I uppgiften avslöjas också om eleven har uppfattat att en kvadrat är en rektangel, vilket inte nödvändigtvis behöver påverka resonemanget.

De aspekter som kan belysas med uppgiften är

- hur resonemang förs genom att ställningstaganden följs och motiveras
- hur lösningen legitimeras genom resonemang
- hur resonemang förs kring begrepp och hur de relaterar till varandra
- hur resonemang förs genom att argument troliggörs med empiriska underlag
- hur resonemang förs genom att argument följs och bemöts.

De delar ur kunskapskraven som kan belysas med uppgiften är med vilken kvalitet eleven

- för underbyggda resonemang om resultatens rimlighet
- för resonemang kring hur begreppen relaterar till varandra
- framför och bemöter matematiska argument på ett sätt som för resonemangen framåt.

Att föra *enkla och till viss del* underbyggda resonemang

Att framföra och bemöta matematiska argument som *till viss del för resonemangen framåt*

Elevarbete 1 – Bråk

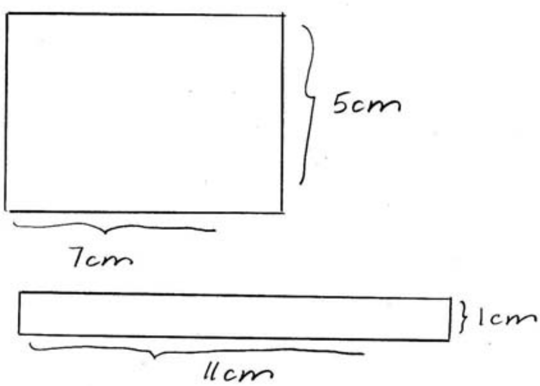
$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ är en hel. $\frac{2}{4}$ är bara en halv, så rätt svar skulle vara $\frac{4}{4}$.

I elevarbetet ges en korrekt beskrivning av additionen och eleven motiverar att resultatet i uppgiften inte stämmer, det vill säga att resultatet inte är rimligt. Ställningstagandet bemöts genom att ett motexempel visas.

I elevarbetet förs ett **enkelt och till viss del** underbyggt resonemang om resultatets rimlighet.

I elevarbetet framförs och bemöts ett matematiskt argument på ett sätt som **till viss del för resonemanget framåt**.

Elevarbete 2 – Ståltråden



- Den kan inte bli större för då blir det en kvadrat
- Den kan inte bli mindre för då blir det bara ett streck.

I elevarbetet visas ett exempel på största möjliga och minsta möjliga rektangel. Eleven visar inte kunskap om att en kvadrat även är en rektangel men konstaterar att det skulle kunna vara möjligt att göra arean större. Den minsta rektangeln är ritad då längd och bredd är angivna i heltal. Resonemangen är underbyggda med ritade figurer. Resultat tolkas och argument framförs om resultatens rimlighet. Utifrån ett resonemang om hela tal finns inte någon mindre rektangel.

I elevarbetet förs **enkla och till viss del** underbyggda resonemang om största och minsta möjliga area.

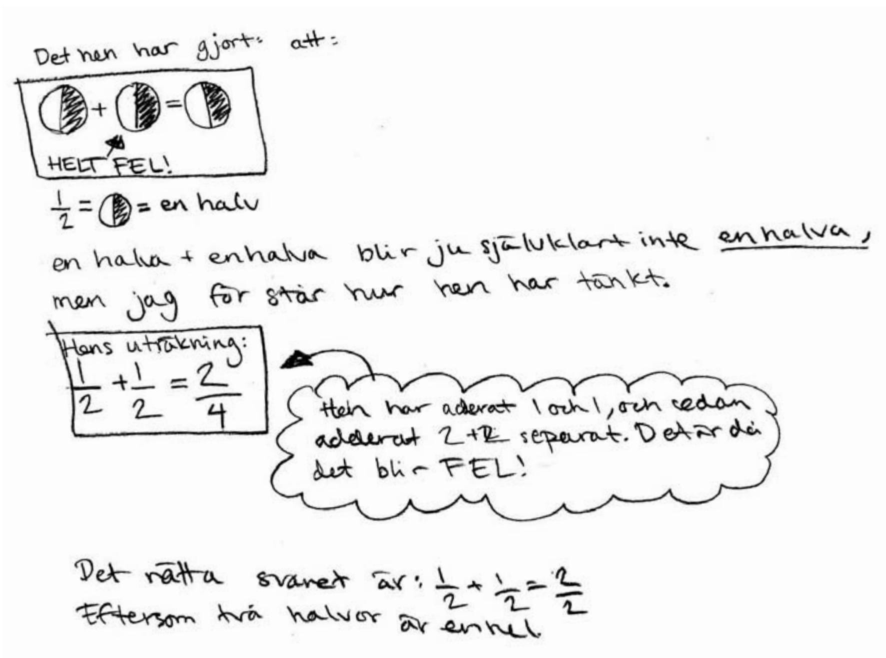
Ett **enkelt** resonemang om hur begreppen relaterar till varandra förs, det vill säga resonemang om areans storlek till en given omkrets.

I elevarbetet framförs argument om största och minsta möjliga area som **till viss del för resonemanget framåt.**

Att föra *utvecklade och relativt väl* underbyggda resonemang

Att framföra och bemöta matematiska argument som *för resonemangen framåt*

Elevarbete 3 – Bråk

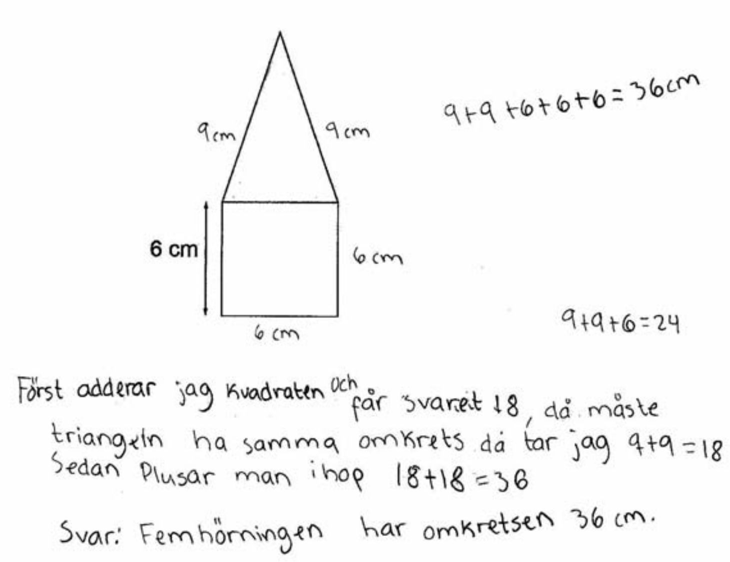


I elevarbetet motiverar eleven med bilder, ord och matematiskt symbolspråk varför beräkningen är fel. Argumentet bemöts genom att ett motexempel visas och förklaringar ges på olika sätt till kamraten. Eleven driver processen framåt och förklarar hur kamraten kan ha tänkt.

I elevarbetet förs ett **utvecklat och relativt väl** underbyggt resonemang om resultatets rimlighet.

I elevarbetet framförs och bemöts ett matematiskt argument på ett sätt som **för resonemanget framåt**.

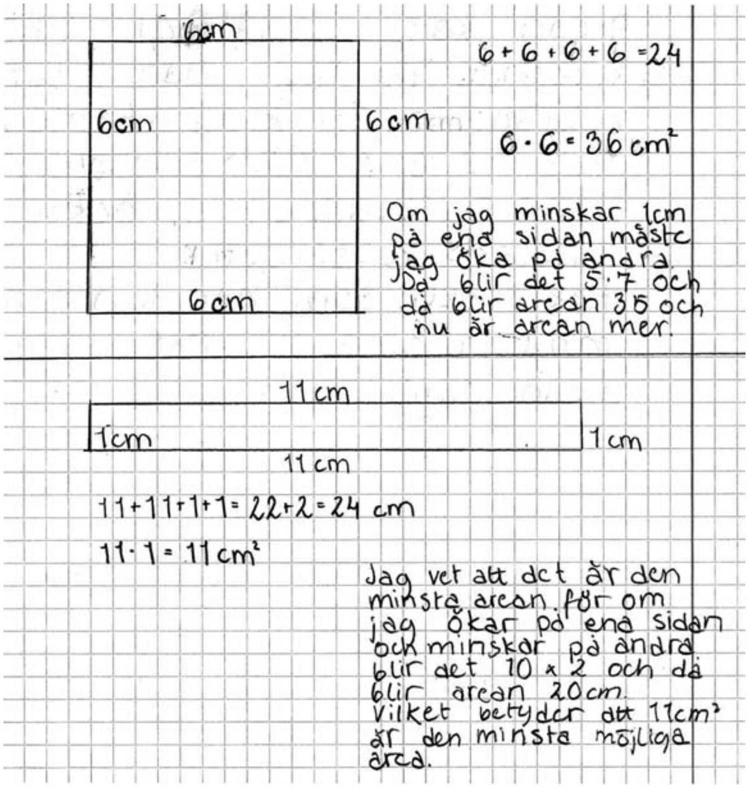
Elevarbete 4 – Femhörningen



I elevarbetet adderas kvadratens tre sidor och ett argument förs fram om att triangelns ben har samma längd, vilket är ett steg vidare i processen. Eleven visar att beräkningarna är möjliga och att det finns en logisk följd. Genom resonemang kommer eleven fram till ett korrekt svar.

I redovisningen framförs argument som **för resonemanget framåt** till en lösning av uppgiften.

Elevarbete 5 – Ståltråden



I elevarbetet visas att kvadraten har den största arean, vilket är korrekt. Den minsta rektangeln är ritad då längd och bredd är angivna i heltal. Resonemangen är underbyggda med väl valda ritade figurer och beräkningar. Slutsatsen om minsta möjliga rektangel underbyggs av ett resonemang om relationen mellan längd och bredd vid en given omkrets och rektangelns area. Utifrån ett resonemang om hela tal finns inte någon mindre rektangel. Resultat tolkas och hållbara argument framförs.

I elevarbetet förs **utvecklade och relativt väl** underbyggda resonemang om största och minsta möjliga area.

Ett **utvecklat** resonemang förs kring begrepp, det vill säga resonemang om areans storlek i relation till en given omkrets.

I elevarbetet framförs argument om relationen mellan längd och bredd vid en given omkrets som **för resonemanget framåt.**

Att föra *välutvecklade och väl* underbyggda resonemang

Att framföra och bemöta matematiska argument som *för resonemangen framåt och fördjupar eller breddar dem*

Elevarbete 6 – Femhörningen

Kvadrat

24cm

24 - 6 = 18 cm

Triangel

24cm

24 - 6 = 18 cm

Eftersom kvadraten och triangeln bildar en femhörning tillsammans så har de en gemensam linje i mitten. Då kan man ta bort den (x 2). Då blir det 18 cm kvar på båda figurerna. Det bildar omkretsen på femhörningen.

18 + 18 = 36 cm

I elevarbetet finns triangelns och kvadratens omkretsar beräknade, men beräkningarna visas inte. Den gemensamma sidan subtraheras från respektive omkrets. Femhörningens sidor adderas och beräkningarna samt resultaten är korrekta. Elevarbetet visar argument om varför beräkningarna är möjliga och argumenten ges i logisk följd. Ett generellt resonemang förs om varför lösningsmetoden är möjlig.

I elevarbetet förs ett **välutvecklat** resonemang om begrepp, det vill säga om omkrets och längder.

I elevarbetet förs **resonemanget framåt och fördjupas** för att legitimera resultatet.

Elevarbete 7 – Femhörningen

$6 \cdot 3 = 18$ kvadratsidorna

2 triangelsidor är lika stora
som 3 kvadratsidor

1 triangelsida är 9cm
1 Kvadratsida är 6cm

Eftersom kvadratsidorna tillsammans
blir 18cm och triangelsidorna
tillsammans blir 18cm så räknar jag
ihop det.

$18 \cdot 2$ $(18 + 18) = 36$cm

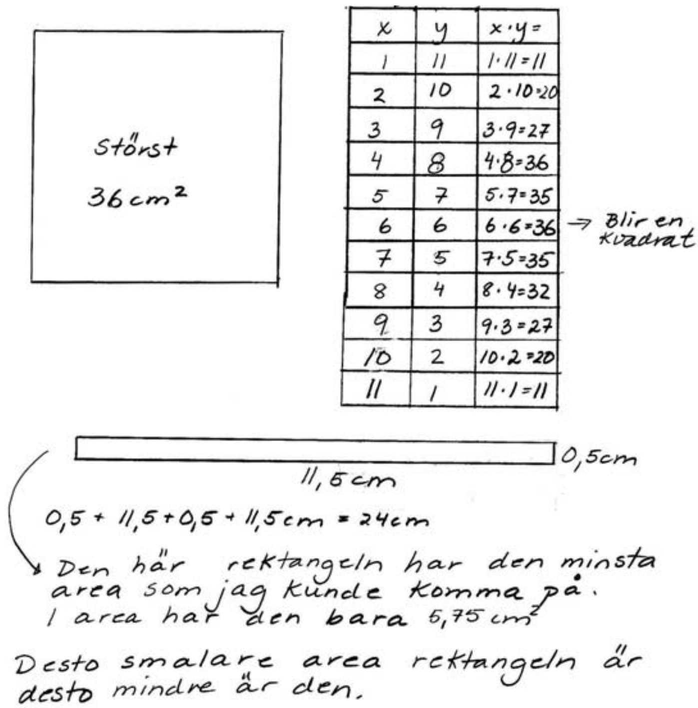
Svar: Omkretsen på den här fem-
hörningen är 36cm

I elevarbetet utgår eleven från att två av triangelns sidor tillsammans är lika långa som kvadratens tre sidor är tillsammans. Argument förs genomgående för ställningstaganden och beräkningar. Processen drivs fram i en logisk följd utan luckor. Argumenten är tillräckliga och hållbara.

I elevarbetet förs ett **välutvecklat** resonemang om begrepp, det vill säga om omkrets och längder.

I elevarbetet förs **resonemanget framåt och fördjupas** för att komma till en lösning.

Elevarbete 8 – Ståltråden


Störst

36 cm^2

x	y	x · y =
1	11	1 · 11 = 11
2	10	2 · 10 = 20
3	9	3 · 9 = 27
4	8	4 · 8 = 36
5	7	5 · 7 = 35
6	6	6 · 6 = 36 → Blir en kvadrat
7	5	7 · 5 = 35
8	4	8 · 4 = 32
9	3	9 · 3 = 27
10	2	10 · 2 = 20
11	1	11 · 1 = 11

0,5cm

11,5cm

0,5 + 11,5 + 0,5 + 11,5cm = 24cm

Den här rektangeln har den minsta area som jag kunde komma på. I area har den bara 5,75 cm^2

Desto smalare area rektangeln är desto mindre är den.

I elevarbetet visas att kvadraten har den största arean. Slutsatsen underbyggs av en systematisk tabell med areaberäkningar där möjliga längder och bredder i heltal finns. Tabellen utgör underlag för troliggörande av argumenten. Den minsta arean som eleven har hittat är en rektangel med bredden 0,5 cm. Resonemangen är underbyggda med ritade figurer, systematisk tabell och beräkningar. Det empiriska underlaget är hållbart och tillräckligt. Resultatet av den egna undersökningen tolkas och relevanta argument framförs. Utifrån argumenten dras en slutsats om relationen mellan rektangels form och areans storlek.

I elevarbetet förs **välutvecklade och väl** underbyggda resonemang om resultatens rimlighet största och minsta möjliga area.

Ett **välutvecklat** resonemang förs kring begrepp, det vill säga resonemang om areans storlek i relation till en given omkrets

I elevarbetet framförs matematiska argument om relationen mellan en rektangels form och areans storlek, vilket **för resonemanget framåt och fördjupar det.**

4. Bedömning i årskurs 9

Det här kapitlet lyfter fram hur verksamma lärare har bedömt elevarbeten i ämnet matematik utifrån kunskapskraven för årskurs 9. I de olika avsnitten finns elevarbeten och kommentarer som relaterar till olika delar av kunskapskraven. I avsnittet behandlas delar av kunskapskraven som utgår från *förmågan att föra och följa matematiska resonemang.*

Till detta material finns också två filmer som handlar om hur verksamma lärare bedömer elevers resonemang i en muntlig bedömningssituation. En film visar elever i årskurs 9 som genomför en muntlig uppgift tillsammans med en lärare. I den andra filmen diskuterar tre lärare kunskapskravens värdeord för resonemangsförmågan. Lärarna utgår från exempel i elevernas gruppsamtal. Båda filmerna kan användas som underlag för diskussioner om hur förmågan att föra och följa resonemang kan bedömas muntligt.

ATT FÖRA OCH FÖLJA MATEMATISKA RESONEMANG

Inledningsvis presenteras den förmåga och de delar av kunskapskraven som bedömningarna har utgått ifrån samt ett resonemang om relationen mellan förmågan och det centrala innehållet. Därefter görs en analys av olika bedömningsaspekter av den aktuella förmågan och värdeorden. Vilka aspekter kan finnas i *förmågan att föra och följa matematiska resonemang*? Vad innebär det att föra **enkla** resonemang jämfört med att föra **utvecklade** resonemang?

Slutligen presenteras uppgifter med tillhörande elevarbeten. I anslutning till varje elevarbete förs ett resonemang om hur lärare har bedömt dessa utifrån de aktuella delarna av kunskapskraven.

De delar av kunskapskraven som kommenteras utgår från *förmågan att föra och följa matematiska resonemang*. Värdeorden som beskriver kvaliteter i resonemangsförmågan finns på tre olika ställen i kunskapskraven för årskurs 9:

*Kunskapskrav för **betyget E** i slutet av årskurs 9*	*Kunskapskrav för **betyget C** i slutet av årskurs 9*	*Kunskapskrav för **betyget A** i slutet av årskurs 9*
Eleven för **enkla och till viss del** underbyggda resonemang om val av tillvägagångssätt och om resultatens rimlighet i förhållande till problemsituationen (…). … I beskrivningen kan eleven (…) föra **enkla** resonemang kring hur begreppen relaterar till varandra.	Eleven för **utvecklade och relativt väl** underbyggda resonemang om tillvägagångssätt och om resultatens rimlighet i förhållande till problemsituationen (…). … I beskrivningen kan eleven (…) föra **utvecklade** resonemang kring hur begreppen relaterar till varandra.	Eleven för **välutvecklade och väl** underbyggda resonemang om tillvägagångssätt och om resultatens rimlighet i förhållande till problemsituationen (…). … I beskrivningen kan eleven (…) föra **välutvecklade** resonemang kring hur begreppen relaterar till varandra. ▶▶

… I redovisningar och diskussioner för och följer eleven matematiska resonemang genom att framföra och bemöta matematiska argument på ett sätt **som till viss del för resonemangen framåt.**	… I redovisningar och diskussioner för och följer eleven matematiska resonemang genom att framföra och bemöta matematiska argument på ett sätt **som för resonemangen framåt**	… I redovisningar och diskussioner för och följer eleven matematiska resonemang genom att framföra och bemöta matematiska argument på ett sätt **som för resonemangen framåt och fördjupar eller breddar dem.**

Att *följa och föra matematiska resonemang* innebär både en tolkande och en skapande del. Den tolkande delen innebär att göra en relevant tolkning av det som framförts muntligt eller skriftligt. Det innebär att följa och bedöma både andras och/eller sina egna argument. Den skapande delen handlar om att driva en process framåt med nya matematiska argument. I Kommentarmaterialet till kursplanen i matematik beskrivs att *progressionen ligger i allt högre krav på elevens sätt att framföra och bemöta matematiska argument i redovisningar, samtal och diskussioner*. I kunskapskraven uttrycks progressionen från årskurs 1 till årskurs 9. Från informella argument i årskurs 1–3 till relevanta, hållbara och tillräckliga argument i årskurs 7–9. Från att ställa frågor i årskurs 1–3 till att bemöta argument i årskurs 7–9. Från att föra resonemang om val av metoder och räknesätt i årskurs 1–3 till att föra resonemang om val av tillvägagångssätt i åk 7–9.

Problemlösning är en central aktivitet i matematik, som exempelvis ger eleverna tillfälle att föra matematiska resonemang om resultatens rimlighet. Vid lösning av problem görs strategival som underbyggs av matematiska argument och resonemangen kan leda fram till lösningen. Resonemangen kan vara enkla och till viss del underbyggda, såväl som välutvecklade och väl underbyggda. Beroende på uppgifternas karaktär kommer resonemang om resultatens rimlighet att föras på olika sätt.

Matematiska begrepp ingår i det centrala innehållets alla kunskapsområden och möjlighet finns att föra matematiska resonemang om begrepp och om hur olika begrepp relaterar till varandra. I Kommentarmaterialet till kursplanen i matematik beskrivs förmågan att följa matematiska resonemang bland annat som *att utveckla en förståelse för att matematiska samband är konstruerade, och att de därför också kan återupptäckas genom att man resonerar sig fram*. Vid undersökande uppgifter kan elever upptäcka matematiska samband eller komma fram till generella lösningar. Ett exempel kan vara att elever har undersökt hur arean i rektanglar förändras då basen ökar med 10 % och höjden minskar med 10 %. Genom undersökningens resultat kan resonemangen föras framåt mot en generell slutsats.

Uppgifters formulering och karaktär ger möjlighet att visa olika delar av förmågan att resonera. Vilka resonemang som förs är beroende av det centrala innehållet. När elever arbetar med uppgifter i matematik berörs ofta flera olika delar av det centrala innehållet. I det här materialet presenteras elevarbeten inom områdena bråk, algebra och geometri för att belysa värdeorden i kunskapskraven. Värdeorden illustreras med olika elevarbeten för att visa att de kan konkretiseras på olika sätt.

Bedömningsaspekter

I arbetet med olika uppgifter kan eleven på flera olika sätt visa sin förmåga att föra och följa matematiska resonemang. Det kan vara i samband med problemlösning där resonemang kan föras om val av tillvägagångssätt eller resonemang om resultatens rimlighet. Resonemangen kan vara mer eller mindre underbyggda av bilder, tabeller, grafer, beräkningar eller andra matematiska uttrycksformer. När eleven använder och beskriver olika matematiska begrepp kan eleven också föra resonemang om begreppen och hur begreppen relaterar till varandra. I arbetet med att lösa uppgifter eller i diskussioner med kamrater och läraren kan eleven föra och följa matematiska resonemang samt framföra och bemöta argument och föra resonemangen framåt.

När det gäller *förmågan att föra och följa matematiska resonemang* kan bedömningen av elevarbeten utgå ifrån:

Hur resonemang förs genom att ställningstaganden följs och motiveras
En aspekt av elevens förmåga att föra och följa resonemang handlar om i vilken grad eleven kan föra fram argument och resonera kring ett ställningstagande, kring en lösning eller om resultats rimlighet. Detta omfattar att skilja på vad som är ett påstående och vad som är ett välgrundat matematiskt argument och bedömningen anger i vilken grad argumenten är välgrundade, hållbara och tillräckliga. Matematiska argument kan framföras och underbyggas med hjälp av olika uttrycksformer. Ett välgrundat argument kan till exempel utgå från en geometrisk figurs egenskap, medan ett påstående kan vara något som en klasskamrat har sagt. En högre kvalitet innebär att de matematiska argumenten är välgrundade, hållbara och tillräckliga. En lägre kvalitet innebär att argumenten är påståenden som inte är matematiskt grundade och inte heller tillräckliga.

Hur lösningen legitimeras genom resonemang
En annan aspekt handlar om att eleven förklarar varför man kan göra det man gör under givna förutsättningar. Ett matematiskt resonemang består av en följd av påståenden där varje påstående följer logiskt ur de föregående. Argumenten i ett resonemang eller en lösning måste också bilda en logisk följd. Matematiken bygger på logiska följder där det finns ett gällande samband mellan påståenden, till exempel att om en triangel är likbent så har triangeln två lika stora vinklar. En högre kvalitet innebär att den logiska följden följs och att argumenten följer på varandra. En lägre kvalitet innebär att det finns luckor i det matematiska resonemang som leder fram till lösningen.

Hur resonemang förs kring begrepp och hur de relaterar till varandra
Logiska följder anger också samband eller relationer mellan begrepp. Elevens matematiska resonemang kring hur begrepp relaterar till varandra är nära knutet till förmågan att använda och beskriva dessa begrepp. En lägre kvalitet innebär att föra ett enkelt resonemang om hur man till exempel genom mätningar och beräkningar kan komma fram till att volymen av en pyramid är en tredjedel av ett rätblocks volym, givet att basytornas areor och höjder är lika. En högre kvalitet omfattar att föra generella resonemang om begrepp och relationer mellan begrepp, till exempel att två cylindrar med lika stor mantelyta kan ha olika volym. En högre kvalitet kan också innebära att tolka

och föra matematiska resonemang om samband mellan flera begrepp och relationer samt att hänvisa till satser.

Hur resonemang förs genom att argument troliggörs med empiriska underlag

I undersökande uppgifter kan det finnas möjlighet att se mönster, strukturer eller regelbundenheter. Det gäller då att avgöra om dessa är tillfälligheter eller om det finns en förklaring. En aspekt av förmågan att föra och följa resonemang handlar om i vilken grad empiriska fakta används som underlag för slutsatsen eller resultatets rimlighet. En lägre kvalitet innebär att få empiriska fakta redovisas. Exempel på sådana empiriska fakta kan vara figurer, beräkningar eller systematiska tabeller som underbygger det matematiska resonemanget och slutsatsen. En högre kvalitet innebär att det matematiska resonemanget är väl underbyggt med hjälp av väl valda uttrycksformer anpassade till situation och sammanhang. En högre kvalitet är också, om uppgiften medger det, ett generellt resonemang där exempelvis algebraiska uttryck används.

Hur resonemang förs genom att argument ges med hänvisning till satser

En mer formell metod är att utifrån matematiska satser eller axiom resonera sig fram till en lösning. En viktig aspekt är då att det inte ska finnas luckor i det matematiska resonemanget, att varje steg är underbyggt av matematiska argument och följer av logisk nödvändighet. Renodlad bevisföring finns inte i kursplanen för grundskolan men i de senare årskurserna möter eleverna grunderna för bevisföring.

Hur resonemang förs genom att argument följs och bemöts

Ytterligare en aspekt av förmågan att föra och följa matematiska argument omfattar hur resonemangen följs och bemöts. Denna aspekt omfattar dels att göra en relevant tolkning av det som framförts och att följa och bedöma sina egna eller någon annans argument, dels handlar det om att driva processen framåt genom att ta steg och tänka nytt.

Att bemöta ett matematiskt argument kan ske både muntligt och skriftligt. En lägre kvalitet innebär att bemöta argument genom att ställa en fråga eller utifrån tolkningen driva processen ett steg framåt. En högre kvalitet innebär att i bemötandet visa på en ny infallsvinkel eller ge matematiska argument av annat slag som driver processen framåt eller ge exempel som kullkastar argumentet. Det kan också innebära att driva hela processen av matematiska resonemang fram till en lösning.

Ett sätt att bemöta argument är att visa på motexempel. Det kan vara att visa på, att under givna förutsättningar, en slutsats eller ett ställningstagande inte stämmer eller att resultatet inte är rimligt. I uppgiften bråk för årskurs 9 visar elevarbeten motexempel genom att visa att summan av bråken $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$ inte kan vara lika med $\frac{2}{5}$ eftersom $\frac{1}{2}$ är större än $\frac{2}{5}$.

ELEVARBETEN MED KOMMENTARER

För att illustrera de värdeord som anger kvaliteter för hur resonemang förs och följs presenteras fyra uppgifter och tio kommenterade elevarbeten. Uppgifternas karaktär medför att olika typer av resonemang prövas. Elevarbetena sorteras under de värdeord de i huvudsak illustrerar.

I arbetet med uppgifterna kan eleven på flera olika sätt visa kunnande i *förmågan att föra och följa matematiska resonemang*. Det kan omfatta aspekterna:

- hur resonemang förs genom att ställningstaganden följs och motiveras
- hur lösningen legitimeras genom resonemang
- hur resonemang förs kring begrepp och hur de relaterar till varandra
- hur resonemang förs genom att argument troliggörs med empiriska underlag
- hur resonemang förs genom att argument ges med hänvisning till satser
- hur resonemang förs genom att argument följs och bemöts.

Utgångspunkten för elevarbetena är följande uppgifter:

Uppgift Bråk

En av dina kamrater har gjort följande beräkning: $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$ vilket är fel.
Förklara för din kamrat varför det är fel.

I uppgiften finns möjlighet att förklara ett ställningstagande. Ställningstagandet är redan givet vilket gör att uppgiften har en enkel ingång. I uppgiften ges möjlighet att använda olika uttrycksformer, till exempel bilder, ord och matematiska symboler, i resonemangen om varför beräkningen är fel. Det går också att visa motexempel. Uppgiftens formulering ger begränsade möjligheter att visa högre kvaliteter.

De aspekter som kan belysas med uppgiften är

- hur resonemang förs genom att ställningstaganden följs och motiveras
- hur resonemang förs genom att argument följs och bemöts.

De delar ur kunskapskraven som kan belysas med uppgiften är med vilken kvalitet eleven

- för underbyggda resonemang om resultatens rimlighet
- framför och bemöter matematiska argument på ett sätt som för resonemangen framåt.

Uppgift Triangelns vinklar

Är det möjligt att en triangel har en rät vinkel, en trubbig vinkel och en spetsig vinkel? Motivera ditt svar.

I uppgiften finns möjlighet att förklara om det är möjligt eller inte att en triangel har en rät, en trubbig och en spetsig vinkel. Resonemang kan underbyggas av argument om vinkelsumman och olika vinklars storlek. I uppgiften ges möjlighet att i motiveringen använda olika uttrycksformer, till exempel bilder, ord och matematiska symboler. Uppgiftens formulering ger begränsade möjligheter att visa högre kvaliteter.

De aspekter som kan belysas med uppgiften är
- hur resonemang förs genom att ställningstaganden följs och motiveras
- hur resonemang förs kring begrepp och hur de relaterar till varandra
- hur resonemang förs genom att argument följs och bemöts.

De delar ur kunskapskraven som kan belysas med uppgiften är med vilken kvalitet eleven
- för underbyggda resonemang om resultatens rimlighet
- för resonemang om hur begreppen relaterar till varandra
- framför och bemöter matematiska argument på ett sätt som för resonemangen framåt.

Uppgift Formeln

I Kina har man vid arkeologiska utgrävningar funnit många skelettdelar. Med hjälp av lårbenets längd (x cm) kan man bestämma hur lång en människa troligen var när den levde.

Kroppslängden (K cm) kan beräknas med formeln:
$K = 2{,}6x + 65$

a) …
b) …
c) Undersök om formeln kan gälla för små barn.

Uppgiften är av undersökande problemlösningskaraktär och lösningsmetoden är inte given. I uppgiften finns utmaningar, som att göra en uppskattning av längden på små barn och undersöka om formeln kan stämma. Eleven kan på olika sätt framföra argument om varför det inte är möjligt att använda formeln för små barn, det vill säga argumentera för formelns legitimitet. I lösningen finns möjlighet att kommunicera med matematiska symboler och visa ett flertal delberäkningar. Dessa delberäkningar utgör underlag för resonemangen. En annan möjlighet är att genomgående motivera förhållandet mellan lårben och kroppslängd.

De aspekter som kan belysas med uppgiften är

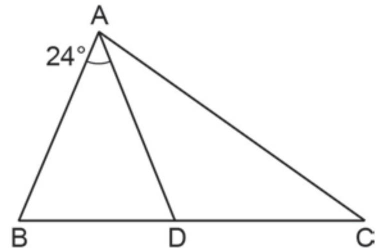
- hur resonemang förs genom att ställningstaganden följs och motiveras
- hur resonemang förs genom att argument troliggörs med empiriska underlag
- hur resonemang förs genom att argument följs och bemöts.

De delar ur kunskapskraven som kan belysas med uppgiften är med vilken kvalitet eleven

- för underbyggda resonemang om resultatens rimlighet
- framför och bemöter matematiska argument på ett sätt som för resonemangen framåt.

Uppgift Vinkeln

I figuren är BDC en rät linje. Vinkeln BAD är 24°. Sträckan AB = AD = CD. Hur stor är vinkeln BAC? Motivera ditt svar.



I uppgiften finns möjlighet att framföra argument om varför beräkningar är legitima. Argumenten utgår från geometriska satser och figurers egenskaper. I lösningen finns möjlighet att kommunicera med ord och matematiska symboler. För att komma till en lösning krävs en logisk följd i beräkningarna.

De aspekter som kan belysas med uppgiften är

- hur resonemang förs genom att ställningstaganden följs och motiveras
- hur lösningen legitimeras genom resonemang
- hur resonemang förs genom att argument troliggörs med empiriska underlag
- hur resonemang förs genom att argument följs och bemöts.

De delar ur kunskapskraven som kan belysas med uppgiften är med vilken kvalitet eleven

- för underbyggda resonemang om val av tillvägagångssätt
- framför och bemöter matematiska argument på ett sätt som för resonemangen framåt.

Att föra *enkla och till viss del* underbyggda resonemang

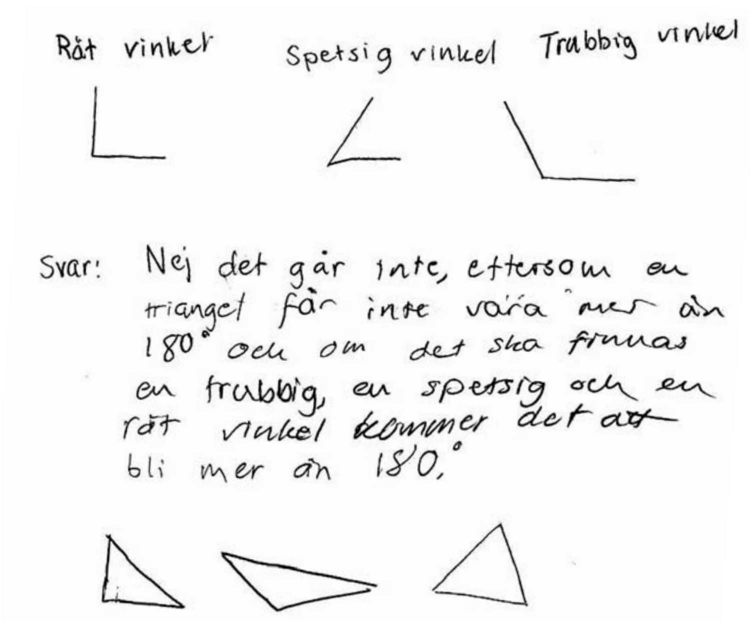
Att framföra och bemöta matematiska argument som *till viss del för resonemang framåt*

Elevarbete 9 – Bråk

I elevarbetet konstateras att $\frac{2}{5}$ är mindre än $\frac{1}{2}$. En av termerna i additionen är $\frac{1}{2}$ och då kan inte summan bli mindre än $\frac{1}{2}$. Argument bemöts genom en enkel analys av ingående termer.

I elevarbetet förs ett **enkelt och till viss del** underbyggt resonemang om resultatets rimlighet.

Elevarbete 10 – Triangelns vinklar



I elevarbetet visas kunskaper om att vinkelsumman i en triangel är 180° och exempel på rät, trubbig och spetsig vinkel ges. Eleven konstaterar att vinkelsumman kommer att bli mer än 180° om alla tre typerna av vinklar ska finnas med i triangeln. Eleven underbygger sitt ställningstagande med enkla bilder. Ett resonemang förs om vinkelsumma och olika vinklar. Argumenten om varför de tre vinklarna inte kan finnas i samma triangel är knapphändiga.

I elevarbetet förs ett **enkelt och till viss del** underbyggt resonemang om resultatets rimlighet.

Ett **enkelt** resonemang förs kring begrepp, det vill säga om vinkelsumma och olika typer av vinklar i en triangel.

I elevarbetet framförs och bemöts ett matematiskt argument om vinkelsumman som till **viss del för resonemanget framåt.**

Elevarbete 11 – Formeln

Mitt lårben är 40 cm så ett barns
är ca 20 cm.
$20 \cdot 2{,}6 = 52 + 65 = 117$ cm
Svar: Ja, det låter rimligt.

I elevarbetet utgår eleven från sitt egna lårben och antar att ett barns lårben kan vara hälften så långt som det egna lårbenet. En beräkning ger att barnet då är 117 cm och slutsatsen att det är rimligt bygger på ett argument i form av en beräkning där ett antaget värde har satts in i formeln. Argumentet är däremot inte tillräckligt för den slutsats som dras.

Slutsatsen är till **viss del** underbyggd med tillämpning av formeln men däremot saknas ett enkelt resonemang om varför resultatet är rimligt.

I elevarbetet framförs och bemöts ett matematiskt argument som till **viss del för resonemanget framåt.**

Att föra *utvecklade och relativt väl* underbyggda resonemang

Att framföra och bemöta matematiska argument som *för resonemangen framåt*

Elevarbete 12 – Bråk

Man kan enkelt se att det är fel, eftersom
1/3 ( ) + 1/2 ( ) måste bli <u>mer</u> än en halv ( ).
2/5 ( ) är <u>mindre</u> än en halv.

Man kan också visa att det är fel, genom att använda "mgn" (minsta gemensamma nämnare). Man gör om alla bråktalen till bråk med samma nämnare.
Mgn här är 30.

$$\frac{1 \cdot 10}{3 \cdot 10} = \frac{10}{30}$$

$$\frac{1 \cdot 15}{2 \cdot 15} = \frac{15}{30}$$

$$\frac{2 \cdot 6}{5 \cdot 6} = \frac{12}{30}$$

$$\frac{10}{30} + \frac{15}{30} = \frac{25}{30}$$

$$\frac{25}{30} \neq \frac{12}{30}$$

Alltså:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \neq \frac{2}{5}$$

I elevarbetet motiverar eleven med bilder, ord och ett korrekt matematiskt symbolspråk varför beräkningen är fel. Argumentet bemöts genom att olika förklaringsmodeller visas, vilket för processen framåt. Underbyggnaden är uttömmande men uppgiftens formulering ger inte möjlighet att visa resonemang på högsta nivå.

I elevarbetet förs ett **utvecklat och relativt väl** underbyggt resonemang om resultatets rimlighet.

I elevarbetet framförs och bemöts matematiska argument som **för resonemanget framåt.**

Elevarbete 13 – Triangelns vinklar

Alla vinklar i en triangel ska vara 180°
tillsamans.

En rätvinklig vinkel = 90°
En spetsig vinkel = mindre än 90°
En trubbig vinkel = mer än 90°

Svar: Nej, det går inte eftersom att det kommer överskrida 180°. Om du adderar en rätvinklig vinkel och en trubbig vinkel överskrider det redan då 180° eftersom att en trubbig vinkel måste vara över 90° och 90° + 90° = 180°

I elevarbetet visas kunskap om att vinkelsumman i en triangel är 180°. Eleven underbygger sitt resonemang genom att säga att vinkelsumman kommer bli mer än 180° om man adderar en rät vinkel och en trubbig vinkel. Figur och förklaringar är hållbara och tillräckliga. Frågeställningen bemöts med ett motexempel.

I elevarbetet förs ett **utvecklat och relativt väl** underbyggt resonemang om resultatets rimlighet.

Ett **utvecklat** resonemang förs kring begrepp, det vill säga om vinkelsumman och olika typer av vinklar.

I elevarbetet framförs och bemöts matematiska argument som **för resonemanget framåt.**

Elevarbete 14 – Triangelns vinklar

Nej. Det är inte möjligt. Summan av alla grader i en triangel är alltid 180°. En rät vinkel är 90°. En trubbig vinkel är mer än 90° och en spetsig vinkel är mindre.

Om en triangel har en rät vinkel tar det 90° av dom 180. Då finns det bara 90 kvar. För att det ska kunna vara med både en trubbig och spetsig måste då den bestå av mer än 90 grader till, och då blir det ingen korrekt triangel.

I elevarbetet visas kunskap om att vinkelsumman i en triangel är 180°. Eleven underbygger sitt resonemang genom att säga att en rät vinkel och en trubbig vinkel tillsammans blir mer än 180°. Frågeställningen bemöts med argument som ges i en logisk följd. Argumenten är tillräckliga och hållbara.

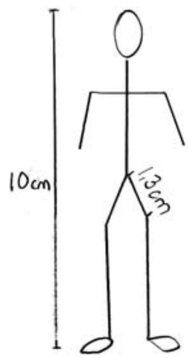
I elevarbetet förs ett **utvecklat och relativt väl** underbyggt resonemang om resultatets rimlighet.

Ett **utvecklat** resonemang förs kring begrepp, det vill säga om vinkelsumman och olika typer av vinklar.

I elevarbetet framförs och bemöts matematiska argument som **för resonemanget framåt.**

Elevarbete 15 – Formeln

Vi säger att barnet är 1m (100cm). Då är hans lårben 13,5 cm enligt formeln. Ett lårben är ungefär lite mindre än $\frac{1}{3}$ av kroppslängden så det verkar ~~rätt~~ orimligt. Det är inte ens i närheten.



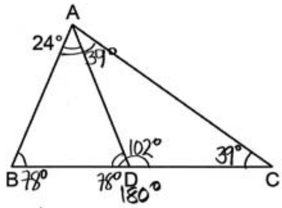
Ser väldigt orimligt ut också.

I elevarbetet finns ett antagande om ett barns längd (100 cm). Lårbenets längd (13,5 cm) är korrekt beräknat utifrån formeln, men beräkningen visas inte. Eleven argumenterar om rimligheten av lårbenets längd utifrån en skalenlig figur samt för ett resonemang kring hur stor del av hela kroppslängden lårbenet kan utgöra. Argumentet bygger på ett försök till motexempel. En slutsats dras om att formeln inte kan gälla för små barn. Argumentet att ett lårben är lite mindre än en tredjedels kroppslängd är inte matematiskt hållbart.

I elevarbetet förs ett **utvecklat och relativt väl** underbyggt resonemang om resultatets rimlighet.

I elevarbetet framförs och bemöts matematiska argument som **till viss del för resonemanget framåt**, eftersom motexemplet inte är övertygande.

Elevarbete 16 – Vinkeln



$\wedge B$ och $\wedge D$ är lika stora.

$180° - 24° = 156°$ $\quad \frac{156°}{2} = 78°$

I en Δ är alltid alla grader sammanlagt $180°$.

I ΔABD var $\wedge D$ $78°$ men när du räknar ut andra Δ tar du det som fins kvar till $180°$ alltså då blir svaret $102°$ för $78° + 102° = 180°$

$\wedge ACD: 180° - 102° = 78°$ $\quad \frac{78°}{2} = 39°$

$\wedge A = 24° + 39° = 63°$

Svar: $\wedge A = 63°$ $\quad \wedge B = 78°$ $\quad \wedge C = 39°$

I elevarbetet använder eleven egenskaper hos likbenta trianglar för att beräkna vinklar men är i sin argumentation inte tydlig med varför detta är möjligt. Utifrån argument om vinkelsumma i en triangel och sidovinklar beräknas andra vinklar. Lösningen bygger på en logisk följd och resultatet är korrekt. Lösningen legitimeras men resonemangen om varför beräkningarna är möjliga har små luckor.

I elevarbetet förs **utvecklade och relativt väl** underbyggda resonemang om tillvägagångssätt.

I redovisningen framförs och bemöts matematiska argument som **för resonemanget framåt och fördjupas** till en lösning av uppgiften.

Att föra *välutvecklade och väl* underbyggda resonemang

Att framföra och bemöta matematiska argument som för *resonemangen framåt och fördjupar eller breddar dem*

Elevarbete 17 – Formeln

Småbarn är ca 50-70 cm långa

I $70 \text{ cm} = 2{,}6x + 65$

$70 - 65 = 2{,}6x + 65 - 65$

$\frac{5}{2{,}6} = \frac{2{,}6x}{2{,}6}$

$1{,}9 \approx x$

II $50 \text{ cm} = 2{,}6x + 65$

$50 - 65 = 2{,}6x + 65 - 65$

$\frac{-15}{2{,}6} = \frac{2{,}6x}{2{,}6}$

$-5{,}8 \approx x$

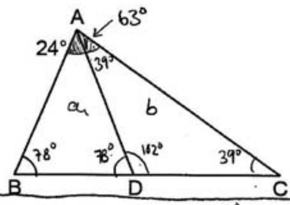
Svar: Nej, denna formel kan inte gälla för små barn eftersom lårbenets längd inte kan vara ett negativt tal och inte heller vara endast ca 2 cm långt.

I elevarbetet görs två antaganden om hur långa små barn kan tänkas vara. Eleven för ett resonemang om formelns rimlighet som är underbyggt av beräkningar. Resultat tolkas och argument framförs om att lårbenets längd inte kan vara negativ. Resultatet av undersökningarna leder till en slutsats om att formeln inte kan gälla för små barn. Argumenten är tillräckliga och hållbara.

I elevarbetet förs ett **välutvecklat och väl** underbyggt resonemang om formelns giltighet och resultatens rimlighet.

I elevarbetet framförs argument genom att värden väljs som ger underlag för slutsatser, vilket **för resonemanget framåt och fördjupar det.**

Elevarbete 18 – Vinkeln



Alla vinklar i en triangel är 180° sammanlagt

$\wedge BAD = 24°$

För att få reda på $\wedge ABD$ och $\wedge ADB$ tar vi 180° (summan av alla vinklar tillsammans) minus $\wedge BAD$ (som vi vet om) (eftersom triangelA är likbent blir båda vinklarna lika stora)

$\wedge ABD$ & $\wedge ADB$: $180° - 24° = 156°$

$\wedge ABD : \frac{156°}{2} = 78°$

$\wedge ADB : \frac{156°}{2} = 78°$

För att ta reda på $\wedge ADC$ måste vi ta halvcirkelns storle 180° minus $\wedge ADB$ (som är 78°)

$\wedge ADC : 180° - 78° = 102°$

Eftersom triangel B är likbent kommer de andra 2 vinklarna ($\wedge ACD$ & $\wedge DAC$) vara lika stora. För att få fram vad $\wedge ACD$ & $\wedge DAC$ är tillsammans tar vi 180° minus $\wedge ADC$ (102°)

$\wedge ACD$ & $\wedge DAC$: $180° - 102° = 78°$

$\wedge ACD : \frac{78°}{2} = 39°$

$\wedge DAC : \frac{78}{2} = 39°$

$\wedge BAC : \wedge BAD + \wedge CAD = 24° + 39° = 63°$ SVAR: 63°

I elevarbetet används egenskaper hos likbenta trianglar för beräkningar av vinklar och argumenten är genomgående tydliga. Utifrån kunskaper om sidovinklar beräknas andra vinklar. Lösningen bygger på beräkningar i en logisk följd med argument om varför de är möjliga. Eleven argumenterar genomgående för sina ställningstaganden med beräkningar. Argumenten är tillräckliga och hållbara. Resultatet är korrekt.

I elevarbetet förs **välutvecklade och väl** underbyggda resonemang om tillvägagångssätt.

I redovisningen **förs resonemanget framåt och fördjupas** till en lösning av uppgiften.

5. Avslutningsord

Det här materialet har lyft fram hur lärare kan tolka och förstå kunskapskraven genom att analysera olika aspekter av dem. Detta är ett arbete som lärare utför både systematiskt och intuitivt när de gör bedömningar av elevers kunskaper.

Det kommer aldrig att vara möjligt att en gång för alla slå fast exakt vilka kunskaper eller prestationer som krävs för att motsvara ett specifikt värdeord. Vad innebär det egentligen att föra **enkla och till viss del** underbyggda resonemang? Det skulle kräva en beskrivning av alla upptänkliga situationer som kan uppstå, och likaså en beskrivning av alla möjliga elevprestationer för att entydigt kunna besvara den frågan.

Vad man däremot kan göra är att försöka ringa in vilka bedömningsaspekter som man kan utgå från i bedömningen. I detta arbete är samtal kollegor emellan centralt. När lärare gör systematiska analyser av kunskapskraven och därefter diskuterar dem inom professionen blir det möjligt att utveckla en större samsyn och ett gemensamt språk för att beskriva kunskapsnivåer och prestationer.

Det är inte ett arbete som kan utföras centralt för att därefter överlämnas till de verksamma lärarna. Skolverket utfärdar kunskapskraven och erbjuder därefter olika slags stöd för att arbeta vidare med dem. Men det är lärarna som gör bedömningarna i praktiken. Deras kunskap om styrdokumenten, eleverna och om undervisningens faktiska innehåll är det som ytterst kan göra bedömningen säker och rättvis.

Skolverket

www.skolverket.se

ISBN: 978-91-7559-037-0